Interrogation n°3 — Corrigé (sujet A)

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition en termes de quantificateurs de "(u_n) converge vers ℓ".

Cf cours.

2) Énoncer la définition de "(u_n) et (v_n) sont adjacentes" ainsi que le théorème sur les suites adjacentes.

Cf cours.

3) Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + 3 \\ u_0 = 5 \end{cases}$. En déduire sa nature en justifiant rigoureusement.

On cherche $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\omega = -2\omega + 3$. On trouve $\omega = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + 3 \\ \omega = -2\omega + 3 \end{cases}$$

en soustrayant ces deux égalités, on trouve : $u_{n+1} - \omega = -2(u_n - \omega)$. Ainsi, la suite $(u_n - \omega)$ est une suite géométrique de raison -2. On en déduit que $u_n - \omega = (-2)^n(u_0 - \omega)$, d'où

$$\begin{aligned} u_n &= (-2)^n(5-1)+1 \\ &= (-2)^n \times 4 + 1 \end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que (u_n) converge. Alors la sous-suite (u_{2n}) convergerait également. Or, on constate que $u_{2n} = 4^n \times 4 + 1 \to +\infty$. Contradiction. Donc (u_n) diverge.

Interrogation n°3 — Corrigé (sujet B)

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition en termes de quantificateurs de "(u_n) tend vers $+\infty$".

Cf cours.

2) Donner la définition de "(v_n) est une suite extraite de (u_n)" ainsi que le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Cf cours.

3) Étudier la nature des suites de termes généraux $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$.

Montrons que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_n - u_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

De plus,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\
&= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \\
&= \frac{2n+1-2n-2}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)} \leq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} \\
&= \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \\
&= \frac{-2n-2+2n+3}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \geq 0
\end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est décroissante, (v_n) est croissante, et leur différence tend vers 0. Elles sont donc adjacentes donc convergent.